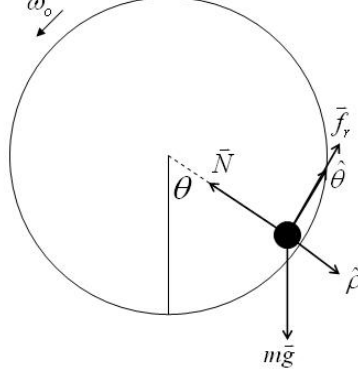


Pauta Problema 1 Control 1
Gabriel Cuevas
29/04/2007

Para realizar ambas partes del problema realizaremos un único DCL, el cual se muestra a continuación:



Debemos tener claro que el sentido de la fuerza de roce, que hemos llamado en el DCL \vec{f}_r , es el señalado en la figura. Esto se explica para el caso en que la partícula se mantiene con un θ_o constante, a partir de que la partícula se opone al movimiento del tubo. Para el segundo caso, cuando la partícula se mantiene unida al tubo, se puede ver que la fuerza de roce estático \vec{f}_r es la que le permite el movimiento. Así descomponiendo las fuerzas para las componentes en polares nos queda:

$$(\hat{\rho}) mg \cos \theta - N = m (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2)$$

$$(\hat{\theta}) f_r - mg \sin \theta = m (\rho \ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})$$

Encontradas las ecuaciones, podemos ver además que:

$$\rho = R$$

$$\Rightarrow \dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$$

Así las ecuaciones quedan:

$$(1) mg \cos \theta - N = -mR\dot{\theta}^2$$

$$(2) f_r - mg \sin \theta = mR\ddot{\theta}$$

Ahora analizaremos cada uno de los casos.

1. $\theta = \theta_o$

Podemos ver que en este caso la partícula se mantendrá con un ángulo constante, por lo tanto:

$$\Rightarrow \dot{\theta} = 0$$

Así las ecuaciones (1) y (2) pasan a ser:

$$(1) N = mg \cos \theta_o$$

$$(2) f_r = mg \sin \theta_o$$

Además se cumple que:

$$(2) f_r = \mu_d N$$

Reemplazando:

$$\mu_d mg \cos \theta_o = mg \sin \theta_o$$

Así se obtiene finalmente que:

$$\mu_d = \tan \theta_o$$

2. $\dot{\theta} = \omega_o$

Podemos ver que en este caso la partícula se mantendrá unida al tubo y no resbalará, por lo tanto se debe cumplir que:

$$\ddot{\theta} = 0$$

Por lo tanto las ecuaciones (1) y (2) pasan a ser:

$$(1) mg \cos \theta - N = -mR\omega_o^2$$

$$(2) f_r = mg \sin \theta$$

A partir de la ecuación (1), imponemos que la partícula nunca se despegue de la superficie interior del tubo, lo cual quiere decir que $N > 0$ para todo ángulo:

$$N = mg \cos \theta + mR\omega_o^2 > 0$$

$$\omega_o^2 > -\frac{g}{R} \cos \theta$$

A esta última expresión debemos encontrar una cota, lo cual nos permita que la partícula pueda llegar al ángulo $\theta = \pi$. Se puede notar que la expresión del lado derecho alcanza su máximo en $\theta = \pi$, por lo tanto evaluándola en aquel ángulo se obtiene:

$$\omega_o^2 > \frac{g}{R}$$

La cual corresponde a la cota mínima para la velocidad angular.

Ahora debemos ver que para que la partícula además no deslice se debe cumplir que:

$$f_r < \mu_e N$$

Así reemplazando queda:

$$f_r = mg \sin \theta < \mu_e (mg \cos \theta + mR\omega_o^2)$$

De la última ecuación se obtiene una cota para el valor de μ_e en función del ángulo θ

$$\mu_e(\theta) > \frac{g \sin \theta}{g \cos \theta + R\omega_o^2}$$

Debemos obtener el valor máximo del lado derecho de la expresión, para obtener una cota que sea válida para todo ángulo θ . Así derivamos (ojo que derivamos con respecto al ángulo) la expresión del lado derecho e igualamos a cero:

$$\begin{aligned} \frac{d\left(\frac{g \sin \theta}{g \cos \theta + R\omega_o^2}\right)}{d\theta} &= 0 \\ \Rightarrow \bar{\theta} &= \arccos\left(\frac{-g}{R\omega_o^2}\right) \end{aligned}$$

Lo cual evaluando en el ángulo encontrado, se obtiene que:

$$\mu_e > \frac{g}{\sqrt{(R\omega_o^2)^2 - g^2}}$$

Donde se ve que la raíz presente en la expresión existe, debido a la condición impuesta sobre la velocidad angular ($\omega_o^2 > \frac{g}{R}$).

Cualquier duda la envían a gcuevas@gmail.com